NUH-2014

ক-বিভাগ

১। (ক) একটি সমমাত্রিক অন্তরক সমীকরণ লিখ। [Write down a homogeneous differential equation] **[Ch-4B, Qu-4]**

(খ) ইন্টিগ্রেটিং ফ্যাক্টর এর সংজ্ঞা দাও। [Define integrating factor]

[Ch-4D, Qu-5]

(গ) লম্ব ট্রাজেক্টরী কাকে বলে? [Define orthogonal trajectories]

[Ch-7, Qu-3]

(ঘ) $\frac{1}{D^3}(x)$ এর মান কত? [What is the value of $\frac{1}{D^3}(x)$?]

উত্তরঃ $\frac{1}{D^3}x = \frac{x^4}{24}$

(ঙ) অপ্রকাশ্য আকারের সমাধানের উদাহরণ দাও। [Give an example of implicit solution of a differential equation]

উত্তরঃ অন্তরক সমীকরণ $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$ এর একটি অব্যক্ত বা অপ্রকাশ্য সমাধান হলোঃ $\operatorname{cosec}(x+y) - \cot(x+y) = x + c$

(চ) প্রকৃত অন্তরক সমীকরণ বলতে কি বুঝ? [What is meant by exact differential equation?] **[Ch-4D, Qu-1]**

(ছ) UC ফাংশন $= x^n$ হলে, UC সেট কত? [If UC function $= x^n$, then what is the UC set?] **[Ch-11, Qu-3]**

(জ) বেসেল এর ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ লিখ। [Write down the Bessel's differential equation] **[Ch-13, Qu-16]**

(ঝ) $y = cx + c^2 + 1$ সম্পর্কটি থেকে অন্তরক সমীকরণ লিখ। [Obtain the differential equation from the relation $y = cx + c^2 + 1$] **[Ch-2, Qu-4]**

(ঞ) সীমামান সমস্যা বলতে কি বুঝায়? [What do you mean by boundary value problem?] **[Ch-1, Qu-25]**

(ট) অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির ফাংশন $= e^x \sin x$ হলে অনির্ণেয় সহগ সেট কত? [If UC function is $e^x \sin x$, what is UC set?] **[Ch-11, Qu-5]**

(ঠ) লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণটির সাধারণ আকার লিখ। [Write down the general form of Legendre differential equation]

[Ch-13, Type-2D, Ex-2]

খ-বিভাগ

২। বার্নোলীর অন্তরক সমীকরণটি লিখ। এই সমীকরণ সমাধানের ধারাবাহিক কার্যপদ্ধতি বর্ণনা কর। [Write down Bernoulli's differential equation. Explain the working rule the solution of this equation]

[Ch-4E, Type-3, Art-4E.4, 4E.5]

৩। সমাধান কর [Solve]: $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$ **[Ch-4E, Type-2, Ex-6]**

৪। একটি অন্তরক সমীকরণ তৈরি কর যার একটি বিশেষ সমাধান [Obtain a differential equation whose one particular solution is]

$y = e^x \cos 4x$ **[Ch-2, Type-2, Ex-30]**

৫। বিদ্যমানতা ও অনন্যতার উপপাদ্য বর্ণনা কর। [State existence and uniqueness theorem] **[Ch-3, Th-1]**

৬। $x^2 - y^2 = c$ বক্ররেখাসমূহের লম্ব ট্রাজেক্টরীগুলো নির্ণয় কর। [Find the orthogonal trajectories of the family of curves $x^2 - y^2 = c$]

[Ch-7, Type-1, Ex-15]

৭। সমাধান কর [Solve]: $(D^2-3D+2)y=e^x$, যখন [when] $y(0)=0, y'(0)=3$

সমাধান: প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ,

$$(D^2-3D+2)y=e^x \quad (1)$$

সম্পূরক ফাংশনের জন্য আমরা পাই,

$$D^2-3D+2=0 \quad (2)$$

সুতরাং সহায়ক সমীকরণ,

$$m^2-3m+2=0$$
$$\Rightarrow m^2-2m-m+2=0$$
$$\Rightarrow m(m-2)-1(m-2)=0$$
$$\Rightarrow (m-2)(m-1)=0$$
$$\therefore m=1,2$$
$$\therefore y_c=Ae^x+Be^{2x}$$

এখন বিশেষ যোগজ $y_p=\frac{1}{D^2-3D+2}e^x=\frac{x}{2D-3}e^x$

$$=\frac{xe^x}{2-3}=-xe^x$$

সুতরাং সাধারণ সমাধান, $y=y_c+y_p$

$$\text{অর্থাৎ } y=Ae^x+Be^{2x}-xe^x \quad (3)$$
$$\therefore y'=Ae^x+2Be^{2x}-e^x-xe^x \quad (4)$$

$(3)\Rightarrow 0=A+B$

$(4)\Rightarrow 3=A+2B-1\Rightarrow 3=-B+2B-1\Rightarrow B=4$

$\therefore A=-4$

সুতরাং বিশেষ সমাধান, $y=-4e^x+4e^x-xe^x$

৮। অনির্ণীত সহগ পদ্ধতিতে সমাধান কর [Solve the differential equation by the method of undetermine co-efficient]:

$$(D^2-1)y=e^{2x}$$

সমাধান: প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ , $(D^2-1)y=e^{2x}$ (1)

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ, $m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm 1$

$\therefore y_c=c_1e^{-x}+c_2e^x$, যেখানে c_1 এবং c_2 ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখানে, অনির্ণীত সহগ ফাংশন, $R(x)=e^{2x}$

অনির্ণীত সহগ সেট $S=\{e^{2x}\}$

যেহেতু S সেটের উপাদানসমূহ y_c তে বিদ্যমান নাই, সুতরাং $\{e^{2x}\}$ সেটের উপাদান দ্বারা y_p নির্ণয় করতে হবে।

(1) এর বিশেষ যোগজ $y_p=Ae^{2x}$ (2)

$$\therefore y_p'=2Ae^{2x}$$

এবং $y_p''=4Ae^{2x}$

এখন (1) হতে পাই, $4Ae^{2x}-Ae^{2x}=e^{2x}$

$$\Rightarrow 3Ae^{2x}=e^{2x}$$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $3A=1\Rightarrow A=\frac{1}{3}$

(2) হতে পাই, $y_p=\frac{1}{3}e^{2x}$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান, $y=y_c+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{1}{3}e^{2x}$

৯। কোনো দেশের জনসংখ্যার বৃদ্ধির হার জনসংখ্যার সহিত সমানুপাতিক। 30 বছরে জনসংখ্যা দ্বিগুণ হলে কত বছরে তিনগুণ হবে? [The population of a country is known to increase at a rate proportional numbers inhabitants. If the population has doubled in 30 years, how long it take to triple?]

[Ch-12, Type-1, Ex-2]

গ-বিভাগ

১০। $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ সমীকরণটি প্রকৃত হওয়ার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত বর্ণনা কর এবং প্রমাণ কর। [State and prove the necessary and sufficient condition for the exactness of the equation $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$] **[Ch-4D, Th-1]**

১১। সমাধান কর [Solve]:

(i) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\ln y=\frac{y}{x^2}(\ln y)^2$ **[Ch-4E, Type-3, Ex-4]**

(ii) $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ সমীকরণের সাধারণ সমাধানের সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

[Find the rule of general solution of $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$]

[Ch-4E, Th-1]

১২। পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by the method of variation of parameters]:

$(D^2-3D+2)y=\cos(e^{-x})$ **[Ch-10, Ex-18]**

১৩। সমাধান কর (যেকোন দুইটি) [Solve (any two)]:

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=xe^x\sin x$ **[Ch-8B, Type-10, Ex-5]**

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+3y=x^2\ln x$ **[Ch-8C, Type-2, Ex-2]**

(iii) $(D^2-1)y=x^2\cos x$ **[Ch-8B, Type-8, Ex-4]**

১৪। নিয়মিত ব্যতিক্রম বিন্দুর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $x=0, 3xy''-(x-2)y'-2y=0$ এর নিয়মিত ব্যতিক্রম বিন্দু। [Define a regular singular point. Show that $x=0$, is a regular singular point of the DE $x=0, 3xy''-(x-2)y'-2y=0$]

[Ch-13, Art-13.4(i), Type-2A, Ex-7]

১৫। কসি-অয়লার অন্তরক সমীকরণটি লিখ। অতঃপর $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=\cos(\ln x)$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। [Write down the Cauchy-Euler differential equation. Hence find the general solution of $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=\cos(\ln x)$]

সমাধান: ১ম অংশ: [Ch-8C, Art-8C.1]

২য় অংশ: প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=\cos(\ln x)$ (1)

ধরি, $x=e^z$ বা, $z=\ln x$ $\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}$ (2)

এখন $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz}$ বা, $x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}$

$\therefore x\frac{dy}{dx}=xDy=Dy$ (3)

যেখানে $\mathscr{D}\equiv\frac{d}{dz}$ এবং $D\equiv\frac{d}{dx}$

আবার,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz}\right)=\frac{x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)-\frac{dy}{dz}}{x^2}=\frac{x\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{dy}{dz}}{x^2}$$

ধরি, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{dy}{dz}=\mathscr{D}^2y-\mathscr{D}y$

অর্থাৎ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}=x^2D^2y=\mathscr{D}(\mathscr{D}-1)y$ (4)

এখন (1) হতে পাই, $\mathscr{D}(\mathscr{D}-1)y-2\mathscr{D}y+2y=\cos(\ln x)$

$\therefore(\mathscr{D}^2-3\mathscr{D}+2)y=\cos(\ln x)$ (5)

সম্পূরক ফাংশনের জন্য আমরা পাই, $(\mathscr{D}^2-3\mathscr{D}+2)y=0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ $m^2-3m+2=0$ বা, $(m-2)(m-1)=0$

$\therefore m=1,2$

$\therefore y_c=Ae^z+Be^{2z}$ অর্থাৎ $y_c=Ax+Bx^2$

এখন বিশেষ যোগজ $y_p=\frac{1}{\mathscr{D}^2-3\mathscr{D}+2}\cos z=\frac{1}{-1-3\mathscr{D}+2}\cos z$

$=\frac{1+3\mathscr{D}}{1-9\mathscr{D}^2}\cos z=\frac{1}{10}(1+3\mathscr{D})\cos z$

$=\frac{1}{10}(\cos z-3\sin z)=\frac{1}{10}\cos(\ln x)-\frac{3}{10}\sin(\ln x)$

সুতরাং সাধারণ সমাধান $y=y_c+y_p$

অর্থাৎ $y=Ax+Bx^2+\frac{1}{10}\cos(\ln x)-\frac{3}{10}\sin(\ln x)$

১৬। ফ্রবিনিয়াস পদ্ধতি ধারায় সমাধান কর [Solve by Frobenious method]:

$(2x+x^3)y''-y'-6xy=0$ **[Ch-13, Type-2A, Ex-1]**

১৭। চুলা হতে যখন একটি পিঠাকে তোলা হয়েছে, এর তাপমাত্রা ছিল 300^0F, তিন মিনিট পরে এর তাপমাত্রা হয় 200^0F। তাপমাত্রা পরিবর্তনের হার বস্তু ও পরিবেশের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক হলে, কখন এর তাপমাত্রা কক্ষ তাপমাত্রা 70^0F হবে? [When a cake is removed from a baking oven, its temperature is measured at 300^0F. Three minutes later it is 200^0F. How long will it take to cool off to room temperature of 70^0F ? If the rate of decreases of temperature is proportional to the difference between the temperature of the cake and that of the room] **[Ch-12, Type-2, Ex-5]**