NUH-2015

ক-বিভাগ

১। (ক) অন্তরক সমীকরণ কাকে বলে? [What is differential equation?]

[Ch-1, Qu-1]

(খ) অন্তরক সমীকরণ কত প্রকার ও কী কী? [What kinds of differential equation? Give an example of each kind] **[Ch-1, Qu-3]**

(গ) $\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y=0$ সমীকরণের ক্রম ও ঘাত কত? [What is the order and degree of $\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y=0$?]

উত্তরঃ $\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y=0$ অন্তরক সমীকরণের ক্রম 3 এবং ঘাত 1।

(ঘ) $y=x^2$ সমীকরণকে প্রথম ক্রমের ও দ্বিতীয় ঘাতের অন্তরীকরণ সমীকরণে প্রকাশ কর। [Form a differential equation of first order and second degree from the equation $y=x^2$]

উত্তরঃ $y=x^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4x^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)-4y=0$$

(ঙ) সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ কাকে বলে? [What is homogeneous differential equation?] **[Ch-4B, Art-4B.3]**

(চ) প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল কাকে বলে? [Define perfect differential]

[Ch-4D, Qu-1]

(ছ) ইন্টিগ্রেটিং ফ্যাক্টর কাকে বলে? [Define integrating factor]

[Ch-4D, Qu-5]

(জ) রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ কাকে বলে? [What is linear differential equation?] **[Ch-1, Qu-12]**

(ঝ) বার্নোলীর সমীকরণটি লিখ। [Write the Bernoulli's equation]

[Ch-4E, Qu-3]

(ঞ) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$ এর ইন্টিগ্রেটিং ফ্যাক্টরটি লিখ। [Write the integrating factor of $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$]

উত্তরঃ $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$

বা, $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x^2}=\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$ (1)

$\therefore$ (1) এর ইন্টিগ্রেটিং ফ্যাক্টর,

$$e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx}=e^{\tan^{-1}x}$$

(ট) $\frac{x\,dx-y\,dy}{x^2-y^2}$ রাশিমালার প্রকৃত ডিফারেনসিয়ালটি লিখ। [Write exact differential of $\frac{x\,dx-y\,dy}{x^2-y^2}$]

উত্তরঃ $\frac{xdx-ydy}{x^2-y^2}$ এর প্রকৃত অন্তরক $=d\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right\}$

(ঠ) লম্বপথ জোট কাকে বলে? [What is orthogonal trajectory?]

[Ch-7, Qu-3]

খ-বিভাগ

২। যে সকল পরাবৃত্ত গোত্রের উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ x -অক্ষ বরাবর তার অন্তরক সমীকরণ গঠন কর। [Find the differential equation of the family of parabola with focus origin and axis along the x-axis]

[Ch-2, Type-2, Ex-12]

৩। $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$ এর সমাধান নির্ণয় কর। [Find the solution of $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$] **[Ch-4A, Type-2, Ex-4]**

৪। দেখাও যে, $x\,dy - y\,dx = 0$ এর $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$ একটি ইন্টিগ্রেটিং ফ্যাক্টর। [Show that $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$ is integrating factor of $x\,dy - y\,dx = 0$]

[Ch-4D, Type-3, Ex-1]

৫। $y = px - \ln p$ এর সাধারণ সমাধান ও ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান নির্ণয় কর। [Find the general solution and singular solution of $y = px - \ln p$]

সমাধান: প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ, $y = px - \ln p$ (1)

এখন (1) কে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = p + \left(x - \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \quad (2)$$

এবং $x - \frac{1}{p} = 0$ (3)

এখন (2) কে x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই,

$p = c$ যেখানে c -একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

(1) এ p -এর মান বসিয়ে পাই,

$y = cx - \ln c$ যা (1) এর নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

আবার, $\Rightarrow x - \frac{1}{p} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = x$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{x}$$

(1) এ p এর মান বসিয়ে পাই,

$$y = \frac{1}{x}\cdot x - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\Rightarrow y = 1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ যা নির্ণেয় ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান।

৬। $r = a(1-\cos\theta)$ বক্ররেখা গোত্রের লম্ব পথজোট নির্ণয় কর। [Find the orthogonal trajectories of the family of curves $r = a(1-\cos\theta)$]

[Ch-7, Type-3, Ex-3]

৭। সমাধান কর [Solve]: $(D^4 - 5D^2 + 4)y = 0$ **[Ch-8A, Type-1, Ex-6]**

৮। $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ এর একটি সমাধান $y = e^x$ । এর অপর অনির্ভরশীল সমাধান নির্ণয় কর। [$y = e^x$ is a solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$. Find its other independent solution] **[Ch-9, Type-2, Ex-5]**

৯। $(D^2-1)y=2, y(2)=-1$ এবং $y'(2)=3$ আদিমান সমস্যাটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর। [Find the particular solution of the initial value problem $(D^2-1)y=2, y(2)=-1$ and $y'(2)=3$]

সমাধানঃ প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ, $(D^2-1)y=2$ (1)

সুতরাং সহায়ক সমীকরণ, $m^2-1=0$

$\Rightarrow m=1,-1$

$\therefore y_c=Ae^x+Be^{-x}$

এখন বিশেষ যোগজ, $y_p=\frac{1}{D^2-1}\cdot 2$

$=-(1-D^2)^{-1}\cdot 2$

$=-(1+D^2+\cdots)2$

$=-2$

সুতরাং সাধারণ সমাধান, $y=y_c+y_p$

অর্থাৎ $y=Ae^x+Be^{-x}-2$ (2)

$\therefore y'=Ae^x-Be^{-x}$ (3)

এখন $y(2)=-1\Rightarrow -1=Ae^2+Be^{-2}-2$

বা, $Ae^2+Be^{-2}=1$ (4)

আবার, $y'(2)=3\Rightarrow 3=Ae^2-Be^{-2}$

বা, $Ae^2-Be^{-2}=3$ (5)

তাহলে (4) + (5) $\Rightarrow 2Ae^2=4$

বা, $A=2e^{-2}$

এবং (4) − (5) $\Rightarrow 2Be^{-2}=-2$

বা, $B=-e^2$

এখন A ও B এর মান (2) এ বসিয়ে পাই, $y=2e^{-2}e^x-e^2e^{-x}-2$

$\therefore y=2e^{-2}e^x-e^2e^{-x}-2$ এটিই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান।

গ-বিভাগ

১০। সমাধান কর [Solve]: (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$, (ii) $(x+y+1)\frac{dy}{dx}=1$

সমাধানঃ (i) প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$ (1)

এখন (1) সমীকরণে $y=vx$ বসিয়ে পাই,

$\frac{d(vx)}{dx}=v+\sin v$

বা, $v+x\frac{dv}{dx}=v+\sin v$

বা, $x\frac{dv}{dx}=\sin v$

বা, $\operatorname{cosec} v\,dx=\frac{dx}{x}$, যা চলক পৃথকীকৃত আকার।

বা, $\int \operatorname{cosec} v\,dx=\int\frac{dx}{x}$ [সমাকলন করে]

বা, $\ln(\operatorname{cosec} v-\cot v)=\ln x+\ln c$

বা, $\ln(\operatorname{cosec} v-\cot v)=\ln xc$

বা, $\ln\left(\operatorname{cosec}\frac{y}{x}-\cot\frac{y}{x}\right)=\ln(cx)$

$\therefore \operatorname{cosec}\frac{y}{x}-\cot\frac{y}{x}=cx$ এটিই নির্ণেয় সমাধান।

সমাধানঃ (ii) প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণ, $(x+y+1)\frac{dy}{dx}=1$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y+1)}$

বা, $\frac{d}{dx}(v-x)=\frac{1}{v+1}$ [$v=x+y$ বসিয়ে]

বা, $\frac{dv}{dx}-1=\frac{1}{v+1}$

বা, $\frac{dv}{dx}=1+\frac{1}{v+1}$

বা, $\frac{dv}{dx}=\frac{v+2}{v+1}$

বা, $\frac{v+1}{v+2}dv=dx$

বা, $\left(1-\frac{1}{v+2}\right)dv=dx$

বা, $\int\left(1-\frac{1}{v+2}\right)dv=\int dx$ [সমাকলন করে]

বা, $v-\ln(v+2)=x+c$

বা, $(x+y)-\ln(x+y+2)=x+c$

বা, $y-\ln(x+y+2)=c.$

বিকল্প পদ্ধতিঃ

$(x+y+1)\frac{dy}{dx}=1$ ধরি, $v=x+y+1$

বা, $v\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=1$ তাহলে, $y=v-x-1$

বা, $\frac{dv}{dx}-1=\frac{1}{v}$ এবং $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$

বা, $\frac{dv}{dx}=1+\frac{1}{v}$

বা, $\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v}$

বা, $\frac{vdv}{v+1}=dx$

বা, $\frac{(v+1)-1}{v+1}dv=dx$

বা. $\left(1+\frac{1}{v+1}\right)dv=dx$

বা, $v+\ln(v+1)=x+c$

বা, $x+y+1+\ln(x+y+2)=x+c$

বা, $y+\ln(x+y+2)=c-1$

বা, $y+\ln(x+y+2)=c_1$ যেখানে $c_1=c_0-1$

১১। $m\,kg$ ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হতে নিচের দিকে পতিত হয় এবং এর বাঁধা $(N)\,ms^{-1}$ বেগের বর্গের সহিত সমানুপাতিক। শেষ বেগ $50\,ms^{-1}$ হলে 2 সেকেন্ড পরে বেগ নির্ণয় কর। কত সময়ে এটি $30\,ms^{-1}$ বেগ প্রাপ্ত হবে? [A body of mass $m\,kg$ is dropped downward from rest and resistance of it is proportional to square of velocity $(N)\,ms^{-1}$. If the end velocity $50\,ms^{-1}$, then find the velocity after 2 sec. How long time after its velocity $30\,ms^{-1}$?] **[Ch-12, Type-6, Ex-1]**

১২। দেখাও যে, $(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ অন্তরক সমীকরণের $y=x^2+1$ একটি সমাধান। অতঃপর ক্রম হ্রাস করে সমীকরণটি সমাধান কর। [Show that $y=x^2+1$ is a solution of $(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$. Hence solve the equation by reduction order] **[Ch-9, Type-1, Ex-1]**

১৩। সমাধান কর [Solve]:

(i) $(D^3+3D^2+3D+1)y=e^{-x}$ **[Ch-8B, Type-2, Ex-7]**

(ii) $(D^2+1)y=x\sin x$ **[Ch-8B, Type-6, Ex-6]**

১৪। পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by the method of variation of parameters]: $(D^3 + D)\,y = \text{cosec}\,x$

সমাধান: দেওয়া আছে, $(D^3 + D)\,y = \text{cosec}\,x$

এখানে সহায়ক সমীকরণ $m^3 + m = 0$

$$\Rightarrow m = 0, \text{ i.} - \text{i.}$$

সুতরাং সম্পূরক ফাংশন $C.F.: y_c = Ay_1 + By_2 + Cy_3$ যেখানে

$y_1 = 1$, y_2 এবং y_3 এর রনস্কিয়ান:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

ধরি প্রদত্ত অন্তরক সমীকরণের সাধারণ সমাধান হল:

$G.S: y = u(x)y_1 + v(x)y_2 + w(x)y_3$. এখানে

$$u(x) = \int \frac{(y_2y_3' - y_3y_2')X}{W(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,\text{cosec}\,x}{1}\,dx \quad [\because X = \text{cosec}\,x]$$

$$= \int \text{cosec}\,x\,dx$$

$$= \ln(\text{cosec}\,x - \cot x) + c_1$$

$$v(x) = \int \frac{(y_3y_1' - y_1y_3')X}{W}\,dx$$

$$= -\int \cos x.\text{cosec}\,x\,dx$$

$$= -\int \cot x\,dx$$

$$= -\ln \sin x + c_2$$

এবং $w(x) = \int \frac{(y_1y_2' - y_2y_2')X}{W}\,dx$

$$= -\int \sin x\ \text{cosec}\,x\,dx = -x + c_3$$

সুতরাং সাধারণ সমাধান $(G.S): y = u(x)y_1 + v(x)y_2 + w(x)y_3$

$$= c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \ln(\text{cosec}\,x - \cot x) - \cos x \ln \sin x - x\sin x.$$

১৫। সমাধান কর [Solve]: **[Ch-8C, Type-4, Ex-1]**

$$(3x + 2)^2\,D^2y + 3(3x + 2)\,Dy - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

১৬। অনির্ণীত সহগ পদ্ধতিতে সমাধান কর [Solve by the method of undetermined coefficients]: $(D^2 + 4)\,y = x^2\sin 2x$

[Ch-11, Type-7A, Ex-1]

১৭। $x(1-x)\,y'' - 3xy' - y = 0$ সমীকরণটিকে ধারার মাধ্যমে সমাধান কর। [Solve the equation $x(1-x)\,y'' - 3xy' - y = 0$ in a series]

[Ch-13, Type-2C, Ex-4]